Solution 11 :

1°/ On a d'après la formule de Binôme-Newton :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

On choisit $a = x$ et $b = 1$ d'où $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$

On a : $\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k = C_n^0 x^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + ... + C_n^n x^n$: c'est une somme

de $(n+1)$ termes positifs $(x \geq 0)$ d'où $\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k > C_n^2 x^2$

et par suite $(1+x)^n > C_n^2 x^2$.

2°/ a) On a : $(1+x)^n > C_n^2 x^2$, on choisit $x = 1$ on obtient :

$2^n > C_n^2$ d'où $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{C_n^2} \Rightarrow \frac{n+1}{2^n} < \frac{2(n+1)}{n^2-n}$ car $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$.

Conclusion : $U_n < \frac{2(n+1)}{n^2-n}$.

b) $0 < U_n < \frac{2(n+1)}{n^2-n}$. On a : $\lim_{n \to +\infty} \frac{2(n+1)}{n^2-n} = 0$ d'où $\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$.

(U_n) est une suite convergente vers 0.

Solution 12 :

1°/ • Montrons que $\forall x \geq 0$, $\sin x \leq x$

Soit $f(x) = \sin x - x$;

f est dérivable sur $\mathbf{R}_+$ et $\forall x \in \mathbf{R}_+$, $f'(x) = \cos x - 1 \leq 0$ car $\forall x \in \mathbf{R}_+$,

$-1 \leq \cos x \leq 1$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	0 ↘	